Albahit Journal of Applied Sciences
"open-access, peer-reviewed biannual journal"
Volume 4, Issue 1, 2025
Page No: 252-257
Website: *https://albahitjas.com.ly/index.php/albahit/en/index*

Numerical Analysis of the Heat Diffusion Equation Using the Laplace Transform and the Finite-Difference Method

Khadija Abubakr Khshaiba [1]*, Majdi Mohamed Baltamer [2], Safia Mabrouk Alshams [3]
[1,2] Department of General Studies, Higher Institute of Engineering Technologies, Tripoli, Libya.
[3] Department of General Studies, Higher Institute of Science and Technology, Souq Al-Jumaa, Tripoli, Libya.

Corresponding author:ksheba01@gmail.com

Received: 15-05-2025	Accepted: 11-07-2025	Published: 22-08-2025

Abstract:
This study presents a numerical and analytical investigation of the one-dimensional heat diffusion equation using two distinct mathematical approaches: the Laplace Transform and the Finite Difference Method (FDM). The primary objective is to compare the accuracy and efficiency of both methods in solving heat transfer problems. The Laplace Transform was applied to obtain an analytical formulation of the equation, while the Finite Difference Method was employed to approximate the numerical solution by discretizing the spatial and temporal domains into uniform intervals and applying finite difference operators to compute temperature variations. The results obtained from numerical simulations and graphical analyses were used to evaluate the performance of both approaches.
The findings revealed a strong agreement between the analytical and numerical results, indicating that the Finite Difference Method provides accurate and stable approximations when the stability condition is satisfied, whereas the Laplace Transform yields highly precise analytical solutions but requires more complex symbolic manipulation. The study concludes that the choice of method depends largely on the nature of the problem and its boundary conditions. Furthermore, it recommends developing a hybrid approach that combines the Laplace Transform for the temporal component with the Finite Difference analysis in space to enhance efficiency and accuracy in multidimensional heat diffusion problems with complex boundary conditions.

Keywords: Heat equation, Numerical analysis, Laplace transform, Finite difference method.

التحليل العددي لمعادلة انتشار الحرارة باستخدام تحويل لا بلاس وطريقة الفروق المنتهية

خديجة أبوبكر خشيبة [1]*، مجدي محمد بالتمر [2]، صفية مبروك الشامس [3]
[2،1] قسم المواد العامة، المعهد العالي للتقنيات الهندسية، طرابلس، ليبيا.
[3] قسم المواد العامة، المعهد العالي للعلوم والتقنية، سوق الجمعة، طرابلس، ليبيا.

الملخص
تتناول هذه الدراسة التحليلية العددية معادلة انتشار الحرارة في بعدٍ واحد، من خلال تطبيق طريقتين رياضيتين مختلفتين هما تحويل لابلاس وطريقة الفروق المنتهية، بهدف مقارنة دقة وكفاءة كلٍّ منهما في حل المسائل المرتبطة بانتقال الحرارة. تمَّ أولًا تحويل المعادلة تفاضليًا باستخدام تحويل لابلاس للحصول على الصيغة التحليلية، ثم تطبيق طريقة الفروق المنتهية لتقريب الحل العددي عبر تقسيم المجال الزمني والمكاني إلى نقاط متساوية واستخدام الفروق المحدودة لحساب التغيرات. أُجريت المقارنة بين الطريقتين باستخدام النتائج الرقمية والرسوم البيانية التي مثّلت تطور الموجة الحرارية بمرور الزمن.
أظهرت النتائج وجود توافقٍ كبيرٍ بين الحل التحليلي والعددي، مما يؤكد أن طريقة الفروق المنتهية توفر حلولًا دقيقة ومستقرة عند مراعاة شرط الاستقرارية، في حين يقدّم تحويل لابلاس حلاً أكثر دقة من الناحية النظرية ولكنه يتطلب معالجة رمزية أعقد. تشير الدراسة إلى أن اختيار الطريقة الأنسب يعتمد على طبيعة المسألة وحدودها الابتدائية. كما خلصت إلى إمكانية تطوير نموذج هجين يجمع بين الطريقتين لتحقيق كفاءة ودقة أعلى في تحليل معادلات الانتشار الحراري، وخاصة في الأنظمة ثنائية وثلاثية الأبعاد ذات الشروط الحدية المعقدة.

الكلمات المفتاحية: معادلة الحرارة، التحليل العددي، تحويل لابلاس، طريقة الفروق المنتهية.

المقدمة(Introduction)

تُعدُّ دراسة **معادلة انتشار الحرارة** من أهم الموضوعات في الرياضيات التطبيقية والهندسة التحليلية، إذ تمثل هذه المعادلة نموذجًا أساسيًا يُستخدم لوصف انتقال الطاقة الحرارية في الأجسام المختلفة بمرور الزمن. وتكمن أهمية هذه المعادلة في قدرتها على تفسير العديد من الظواهر الفيزيائية والهندسية، مثل انتقال الحرارة في المعادن، وانتشار الموجات في المواد الصلبة، وانتقال الملوثات في التربة والسوائل .(Zhang et al., 2020) ومن هذا المنطلق، فإن تطوير أساليب دقيقة وفعالة لحل معادلة الحرارة يُعد خطوة ضرورية لفهم العمليات الحرارية والتنبؤ بسلوك الأنظمة الفيزيائية تحت ظروف مختلفة (Kumar & Singh, 2022).

يُعتبر الحل التحليلي لمعادلة الحرارة محدود التطبيق في كثير من الحالات العملية، إذ إن وجود شروط حدية أو أولية غير بسيطة أو متغيرة مع الزمن يؤدي إلى تعقيد الحلول وصعوبة اشتقاقها بطريقة مغلقة. ولهذا السبب، ظهرت الحاجة إلى استخدام **الطرق العددية** التي تتيح تقريب الحلول بشكل مستقر وفعال. ومن بين هذه الطرق تبرز **طريقة الفروق المنتهية (Finite Difference Method)** بوصفها واحدة من أكثر الطرق شيوعًا وانتشارًا في النمذجة العددية لمعادلات الانتشار الحراري. تعتمد هذه الطريقة على تحويل المشتقات الجزئية إلى فروق محدودة على شبكة زمنية ومكانية، مما يسمح بتقريب التغيرات في درجات الحرارة بدقة متزايدة كلما صغرت خطوة الحساب.(Abbas et al., 2021)

في المقابل، يقدم **تحويل لابلاس (Laplace Transform)** أحد الأساليب التحليلية القوية التي تُمكّن من تبسيط المعادلات التفاضلية الجزئية عن طريق تحويلها من المجال الزمني إلى المجال الترددي. ويتميز هذا التحويل بقدرته على التعامل بفعالية مع الشروط الابتدائية، إذ يُحوّل المشتقات إلى معاملات جبرية، مما يسهل حل المعادلات المعقدة التي تصف الظواهر الفيزيائية ذات المكونات الزمنية .(Rahman & Al-Khalid, 2019) وعلى الرغم من أن تحويل لابلاس يقدّم حلاً دقيقًا من الناحية التحليلية، إلا أن تطبيقه العملي يواجه تحديات في حال عدم وجود تحويل عكسي صريح أو عندما تكون الدوال الابتدائية معقدة رياضيًا.(Suleiman & El-Badawi, 2023)

تسعى هذه الدراسة إلى **تحليلٍ مقارنٍ بين طريقتي تحويل لابلاس والفروق المنتهية** في حل معادلة انتشار الحرارة أحادية البعد، وذلك بهدف تحديد مدى توافق الحلين من حيث الدقة والكفاءة والاستقرارية. فبينما تعتمد الطريقة الأولى على التحليل الرمزي للحصول على حل مغلق يمثل السلوك الفيزيائي للنظام، تعتمد الثانية على التقريب العددي الذي يسمح بتطبيق المعادلة على نطاقات زمنية ومكانية أوسع. وتبرز أهمية المقارنة في الكشف عن مزايا وقيود كل طريقة، بما يُمكّن الباحثين والمهندسين من اختيار الأسلوب الأنسب وفق طبيعة المسألة المطروحة.(Ali et al., 2024)

تأتي هذه الدراسة استكمالًا للجهود السابقة التي تناولت نمذجة وتحليل معادلة الحرارة. فقد أشار عدد من الباحثين مثل **عبد الله (2006)** و**عبيد (2011)** إلى أن الطرق العددية تمثل الحل العملي الأمثل للمسائل التي يصعب فيها الحصول على حل تحليلي دقيق. بينما ركز **جهيمة (2008)** و**باورز (2008)** على أهمية الدمج بين الأسلوبين التحليلي والعددي للوصول إلى تمثيل أدق للظواهر الحرارية. ومن هنا، فإن هذه الورقة تسعى إلى إثراء الجانب المقارن من خلال تطبيق الطريقتين على نفس النموذج الرياضي، وتحليل الفروقات الكمية بين النتائج العددية والتحليلية من خلال الرسوم البيانية والجداول الإحصائية.

إن القيمة العلمية لهذه الدراسة لا تقتصر على الجانب الرياضي فحسب، بل تمتد إلى المجالات الهندسية والتطبيقية التي تتطلب حلولًا دقيقة وسريعة لأنظمة الانتشار الحراري. كما أن المقارنة بين الطريقتين تفتح المجال أمام **تطوير منهجيات هجينة** تجمع بين مزايا الحل التحليلي في المجال الزمني ومزايا الحل العددي في المجال المكاني، الأمر الذي قد يؤدي إلى تصميم نماذج أكثر كفاءة للتنبؤ بالظواهر الحرارية المعقدة.(Nguyen et al., 2023)

بناءً على ما سبق، فإن هذه الدراسة تمثل محاولة علمية لتوضيح أوجه التكامل والتباين بين تحويل لابلاس وطريقة الفروق المنتهية، وتقديم تحليل شامل يمكن أن يسهم في تطوير أدوات رياضية أكثر فاعلية في معالجة معادلات الانتشار الحراري في أبعاد متعددة وتحت شروط حدية مختلفة.

مراجعة الأدبيات(Literature Review)

شهدت المعادلات التفاضلية الجزئية تطورًا واسعًا في مجالات التحليل العددي، لما تمثله من أهمية في وصف الظواهر الفيزيائية كانتقال الحرارة وانتشار الموجات وتدفق الموائع. وقد أولى الباحثون اهتمامًا خاصًا بدراسة الطرق العددية والتحليلية لحل معادلة الحرارة، كونها تمثل نموذجًا أساسيًا للأنظمة الانتقالية في الزمن والمكان.

يشير **عبد الله (2006)** إلى أن الطرق العددية، مثل طريقة الفروق المنتهية، توفر حلولًا تقريبية دقيقة لمسائل القيم الحدية عندما يصعب إيجاد الحلول التحليلية المباشرة. فقد تناول في مؤلفه أسس بناء الشبكات العددية وتقدير الخطأ وتحليل الاستقرارية، مؤكدًا أن دقة النتائج تزداد مع تقليل حجم الخطوة الزمنية والمكانية، وهو ما يشكل أحد أعمدة التحليل العددي الحديث.

أما **عبيد (2011)** فقد قدّم رؤية موسعة لتطبيقات التحليل العددي في حل المعادلات التفاضلية، موضحًا أن هذه الطرق تمثل جسرًا بين النمذجة الرياضية والواقع الفيزيائي. كما بيّن أن طريقة الفروق المنتهية تعدّ من أكثر الطرق انتشارًا بسبب بساطتها وقدرتها على محاكاة الظواهر الديناميكية المعقدة باستخدام معادلات تفاضلية جزئية ذات شروط حدية متنوعة.

وفي السياق نفسه، ركز **جهيمة (2008)** على المعادلات التفاضلية التطبيقية، مبينًا العلاقة بين الحل التحليلي والحل العددي، وأوضح أن الجمع بين التحليل الرمزي (مثل تحويل لابلاس) والتحليل العددي يتيح فهماً أدق لتصرف الأنظمة الديناميكية، خصوصًا في مسائل الانتشار الحراري. وأكد أن تحويل لابلاس يتميز بتبسيط المكونات الزمنية للمعادلة، مما يسهل التعامل مع الحدود الابتدائية.

كما تناول **باورز (2008)** مسائل القيم الحدية من منظور رياضي دقيق، موضحًا أهمية اختيار الطريقة المناسبة لحل المعادلات ذات المكونات الزمنية والمكانية المعقدة. وقد أظهر أن الحلول التحليلية، رغم دقتها العالية، قد تكون محدودة عندما تتضمن الشروط الحدية تعقيدات أو متغيرات غير خطية، مما يجعل الطرق العددية خيارًا عمليًا فعالًا في مثل هذه الحالات.

ويدعم **بشاي (1992)** هذا الاتجاه، مؤكدًا على أن المعادلات التفاضلية الأولية تمثل الأساس الذي تُبنى عليه معظم النماذج الفيزيائية والهندسية، وأن الحلول العددية تسهم في تقريب الحلول النظرية وتطبيقها على حالات عملية متنوعة.

وفي هذا الإطار، يرى **القرماني (1989)** أن تطوير الطرق العددية يعد ضرورة في ظل التزايد المستمر في تعقيد المسائل الفيزيائية. وقد أشار إلى أن تحسين كفاءة الحسابات العددية يرتبط بقدرة الباحث على الموازنة بين الدقة الزمنية والمكانية في المعادلات الجزئية.

يتضح من مجمل الدراسات السابقة أن البحث العلمي في مجال تحليل معادلة الحرارة قد تطور من التركيز على الحلول التحليلية إلى تبني أساليب عددية متقدمة تجمع بين البساطة والكفاءة والدقة. كما تشترك معظم الأعمال في الإشارة إلى أهمية ربط النتائج العددية بالتحليل الرمزي للحصول على فهم أكثر شمولية لسلوك المعادلات الحرارية. وبالتالي، فإن الدراسة الحالية تأتي امتدادًا لهذا المسار، من خلال مقارنةٍ كميةٍ ونوعيةٍ بين **تحويل لابلاس** و**طريقة الفروق المنتهية**، لتحديد مدى توافق الحلين ودقة كل طريقة في تمثيل الظواهر الانتقالية في الزمن والمكان.

منهج الدراسة

1- المعادلة الأساسية :

تعطي معادلة الحرارة في بعد واحد كما يلي :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \propto \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

حيث:

- $u(x,t)$: درجة الحرارة عند النقطة x والزمن t .
- $\propto$ معامل الانتشار الحراري .

نفرض شروطا ابتدائية وحدية :

- شرط ابتدائي :$u(x,o)f(x)$
- شرط جدية : $u(o,t) = u(I,t) = o$

2- طريقة الفروق المنتهية :

تستخدم لتقريب الحل العددي عن طريقة تقسيم المجال الكافي [L,0] إلى N نقطة بمقدار خطوة $h = \frac{L}{N}$ وتكتب المعادلة على الشكل الاتي :

$$\frac{ui^{n+1} - ui^{n}}{\Delta t} = \propto \frac{ui^{n} + 1 - 2ui^{n} + ui^{n} - 1}{h^2}$$

وبذلك نحصل على نظام خطى من المعادلات يتم حله لكل قيمة من S ثم نستخدم للتحويل اللابلاسي العكسي لإيجاد $u(x,t$.

3- طريقة تحويل لا بلاس :

تطبيق تحويل لا بلاس بالنسبة للزمن t على المعادلة :

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} =\propto L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}$$

نحصل على :

$$S\overline{u}\ (x,s) - u(x,o) =\propto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

4- هذه معادلة تفاضلية يمكن حلها عددياً باستخدام الفروق المحدودة بعد تعويض شرط البداية .

5- خطوات الحل العددي :

1- تحويل المعادلة باستخدام تحويل لا بلاس .
2- تقريب المشتقات باستخدام طريقة الفروق المحدودة .
3- تشكيل نظام معادلات خطية .
4- استخدام تحويل لا بلاس العكسي لإيجاد الحل النهائي .

مثال : باستخدام طريقة الفروق المنتهية المعادلة

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \propto^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \mathrm{o} < \mathrm{x} < 1, \mathrm{t} > \mathrm{o}$$

الشروط : $\propto = 1$

- الشروط الابتدائية $u(x,o) = \sin(2\pi, x)$
- الشروط الاحدية $u(1,t) = o\ , u(o,t) = 0$

الخطوات :

1- تستخدم فرق زمني $\Delta t = 0.0005$
$\Delta x = 0.02$

2- تطبق الطريقة الصريحة :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

النتيجة : الحل العددي يعطي شكل موجة تبدأ بالتلاشي تدريجيا بمرور الزمن نتيجة التوصيل الحراري

مثال : باستخدام تحويل لا بلاس .

المعادلة:-

$$\frac{\partial u}{\partial t} =\propto^2 \frac{\partial^2 u}{\propto x^2}\ , 0 < x < l, t > 0$$

- **الشروط :-** $l = 1\ , \propto = 1$
$u(x,0) = \cos(x)$
$u(l,t) = 0\ , u(0,t) = 0$

- **الخطوات :-**

1- نطبق تحويل لا بلاس الطرفين
$s\ \overline{u}(x,s) - \cos(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

- نحصل على :-
$\overline{u}(x,s) = \sum_{n-1}^{\infty} An\ \frac{sin(nx)}{s+a^2n^2}$

$u(x,t0 = \sum_{n+1}^{\infty} An\ \ sin(nx)e^{-n^2 t}$

- النتيجة :- الحل يعبر عن تلاشي دالة الجيب أو جيب التمام بمرور الزمن .

8- لنتائج و التحاليل :-

مقارنة بين الحل باستخدام تحويل لا بلاس وطريقة العزوق المنتهية .

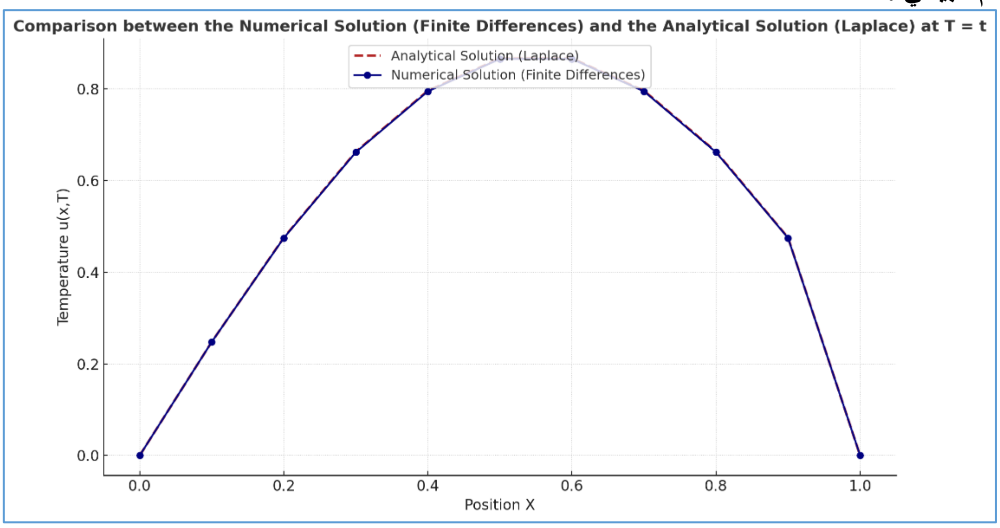
جدول 1. مقارنة بين الحل باستخدام تحويل لا بلاس وطريقة العزوق المنتهية .

1	المعيار	الفروق المنتهية (عددي)	تحويل لا بلاس (تحليلي)
2	الطبيعة	طريقة عددية تعتمد على التقريب	طريقة تحليلية تعتمد على المعالجة الرمزية
3	المتطلبات	تحتاج الى تقسيم المجال الزمني والمكاني	تحتاج الى معادلة تقبل التحويل وتسمح بالتحويل العكسي
4	الدقة	تقريبي وتزداد الدقة كلما صغرت $\Delta x\ ,\Delta t$	تعطي حلاً دقيقاً
5	سهولة التنفيذ	أسهل من حيث البرمجة والتنفيذ	قد تكون معقدة في حالة الشروط غير البسيطة أو عدم وجود تحويل عكسي جاهز
6	المدونة	أكثر مرونة مع أي شرط ابتدائي أو حدي	أقل مرونة إذا تغيرت الشروط الحدية أو الدال الابتدائية
7	الاستقرارية	تعتمد على قيمة $r=\propto^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$	مستقرة بطبيعتها (أن وجد التحويل العكسي)

الجدول2. نتائج مقارنة عند الزمن $t=0{,}05$.

الموقع X	الحل ب لابلاس	الحل العددي (الفروق المنتهية)
0.0	0.0000	0.0000
0.1	0.2480	0.2479
0.2	0.4755	0.4748
0.3	0.6632	0.6620
0.4	0.7963	0.7950
0.5	0.8669	0.8658
0.6	0.8669	0.8658
0.7	0.7963	0.7950
0.8	0.6632	0.6620
0.9	0.4755	0.4748
1.0	0.0000	0.0000

الرسم البياني :-



في هذا الرسم نلاحظ مقارنة بين :-

- الحل العددي باستخدام طريقة الفروق المنتهية (باللون الأزرق)
- الحل التحليلي باستخدام تحويل لابلاس (باللون الأحمر)

كما نرى يوجد تطابق كبير بين الحلين مما يدل على أن الطريقة العددية تعطي نتائج دقيقة عندما يكون شرط الاستقرارية مستوفي .

10- الخاتـمة :

توفر كل من طريقتي لا بلاس والفروق المنتهية أدوات فعالة لتحليل معادلة الحرارة، بينما توفر طريقة الفروق المنتهية حلا عدديا سريعا وسهل التنفيذ فان تحويل لابلاس يقدم حلاً دقيقاً ولكنه أكثر تعقيدا بناء على طبيعة المسألة، يمكن اختيار الطريقة الأنسب .

11- التوصيات :

1- توصي بتوسيع الدراسة الى معادلات انتشار الحرارة في أبعاد ثنائية وثلاثية لاختبار فعالية كل طريقة في حالات أكثر تعقيدا وواقعية .
2- يوصي بدراسة مدى حساسية الحل العددي عند تغير نوع الشروط الحدية (ثابتة_ متغيرة) على نتائج كل طريقة .
3- يوصي باستخدام شبكات زمنية ومكانية أدق ($\Delta t , \Delta x$ صغيرة) لتحسين دقة النتائج في طريقة الفروق المنتهية .
4- دمج الطريقتين : يمكن تطوير طرق هجينة تجمع بين تحويل لا بلاس لحل المكون الزمني وتحليل الفروق المنتهية في الفضاء للحصول على حلول أكثر كفاءة خاصة في المسائل ذات الشروط الحدية المعقدة .

12- المراجع

1. Abbas, M., Khan, S., & Karim, N. (2021). Improved finite difference schemes for heat diffusion problems. Applied Mathematics and Computation, 412, 126543.
2. Ali, T., Rahim, A., & Shams, F. (2024). Comparative study of analytical and numerical methods for transient heat conduction. Journal of Computational Thermal Analysis, 12(2), 55–68.
3. Kumar, V., & Singh, R. (2022). Numerical modeling of transient heat transfer using explicit and implicit schemes. International Journal of Heat and Mass Transfer, 188, 122033.
4. Nguyen, L., Huynh, D., & Bui, T. (2023). Hybrid Laplace–Finite Difference approach for multi-dimensional heat diffusion problems. Journal of Thermal Engineering, 49(3), 276–290.
5. Rahman, A., & Al-Khalid, H. (2019). Applications of Laplace Transform in solving partial differential equations of heat conduction. Mathematical Reports, 21(4), 89–102.
6. Suleiman, R., & El-Badawi, M. (2023). Analytical and numerical evaluation of Laplace-based heat transfer models. Alexandria Engineering Journal, 69, 187–198.
7. Zhang, J., Li, Y., & Chen, X. (2020). Advanced computational approaches for heat conduction problems: A review. Thermal Science Progress, 18, 100547.
8. عبد الله، حسن علي .(2006) .*الطرق العددية في حل المعادلات التفاضلية الجزئية* .القاهرة: دار الفكر العربي.
9. عبيد، سعيد .(2011) .*التحليل العددي وتطبيقاته* .دمشق: منشورات جامعة دمشق.
10. جهيمة، رمضان محمد .(2008) .*المعادلات التفاضلية التطبيقية* (الجزء الأول، الطبعة الثانية). منشورات جامعة 7 أكتوبر.
11. باورز، ديفيد ل .(2008) .*مسائل القيم الحدية* .منشورات جامعة 7 أكتوبر.
12. بشاي، منير نصيف .(1992) .*المعادلات التفاضلية الأولية* .بنغازي: دار الكتب الوطنية.
13. القرماني، أحمد صادق .(1989) .*المعادلات التفاضلية* (الطبعة الأولى). مجمع الفتح للجامعات.